

統計學

1. A certain type of mint has a label weight of 20.4 grams. Suppose that the probability is 0.9 that a mint weights more than 20.7 grams. Let X equal the number of mints that weight more than 20.7 grams in a sample of 8 mints selected at random.

- (a). What is X distributed if we assume independence? (4%)
 (b). Find $P(X=8)$. (3%)

2. 自一等機率分配之母體， $P(x) = \frac{1}{3}, x = 2, 3, 4$ ，用抽樣放回抽取 2 個作為樣本。

令 $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ 和 $S^2 = (X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2$ 。請回答下列各子題：

- (a). 求 \bar{X} 之抽樣分配(sampling distribution). (6%)
 (b). 求 S^2 之抽樣分配(sampling distribution). (6%)
 (c). 請以(a)和(b)之結果驗證 \bar{X} 和 S^2 分別為母體均數(μ)和母體變方(σ^2)的不偏估計式。(以數字計算之，非理論之推導)。 (7%)
 (d). 求算隨機區間 $\bar{X} \pm \sigma$ 之信賴係數。 (6%)
 (e). 若抽得 (x_1, x_2) 為(2,2)，該信賴區間之信賴係數為何？ (4%)
 (f). 若抽得 (x_1, x_2) 為(2,2)，該信賴區間包含母體均數(μ)之機率為何？ (4%)

3. 請解釋下列各名詞：

- (a). Statistic (統計式)。 (5%)
 (b). Binomial random variable(二項隨機變數)。 (5%)

4. 若有一 ARMA(2,2) 的時間數列模型如下：

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2}, \quad \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$$

- (一) 該估計方程式的穩定及可逆轉條件 (stationary and invertable conditions) 為何？ (佔 20%)
 (二) 試用 grid-search procedure(階梯式搜尋法，近似 ML 最大概似估計法) 分析說明如何反覆估計，以獲得最佳參數估計值。 (佔 10%)

5. 有一組聯立的供需方程式如下：

$$\text{需求函數: } q_t = \beta p_t + u_t, \quad u_t \sim NID(0, \sigma_u^2),$$

$$\text{供給函數: } q_t = \alpha p_t + v_t, \quad v_t \sim NID(0, \sigma_v^2), \quad cov(u_t, v_t) = \sigma_{uv}$$

在大樣本資料下，若以普通最小平方法 (OLS) 估計 $\hat{\beta}$ 及 $\hat{\alpha}$ ，則會有不一致性的偏誤 (inconsistent bias) 出現。

- (一) 試以機率極限值 (probability limit value) 推算方式，證明該二參數估計式的不一致性及偏誤量 (佔 10%)，
 (二) 在 $\sigma_{uv} \rightarrow 0$ 之下，(1) 若 $\sigma_u \rightarrow 0$ ，則 $plim(\frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t^2})$ 趨近那一個參數值，(2) 若 $\sigma_v \rightarrow 0$ ，則 $plim(\frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t^2})$ 趨近那一個參數值，配合圖形說明供需變化的經濟意義。(佔 10%)