

科目：微積分

不可使用計算機

※請詳列演算過程，只寫答案者不給分。

一、請問函數 $f(x, y) = |xy|$ 在其定義域內之點 $(0, 0)$ 是否為可微？（須對您的答案作證明才給分）。(10%)

二、試求無窮級數 $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} + \dots$ 之收斂值。(10%)

三、試討論下述極限：(12%)

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + kx - ky^2x)^{\frac{1}{x}} = ?$

2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y^k}{k!} = ?$

四、設有一聯立方程組 $\begin{cases} u^2 - v + 2x = 6 \\ u + v^2 - e^{xy} = 1 \end{cases}$ ，試求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 。(6%)

五、試求函數 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 之二個一階偏導數。(12%)

六、試解下列極限與微分：(每小題各 7 分)

(a) 極限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos(x)}{x \sin(x)}$

(b) 微分 (dy/dx) ： $e^y \ln(x) + \ln(y) = 0$ ， $\ln(x)$ 為自然對數函數

(c) 微分 (dy/dx) ： $y = u^v$ ， u, v 均為 x 的函數

七、試解下列積分：(每小題各 7 分)

(a) $\int e^{ax} \cos(bx) dx$

(b) $\int \frac{6x^2 - 11x - 32}{(x+6)(x+1)^2} dx$

八、(a) 試解下列微分方程：(7 分)

$2xyy' - y^2 + x^2 = 0$ ， y' 表微分 (dy/dx)

(b) 試以 $f(x) = x^2$ ， $2 \leq x \leq 4$ 為例解釋：

平均值定理(Mean Value Theorem)。(8 分)